

Ecuaciones Diferenciales

[Aplicaciones con Texas
Instruments Voyage 200]

2010

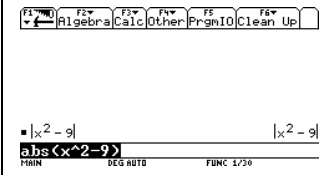
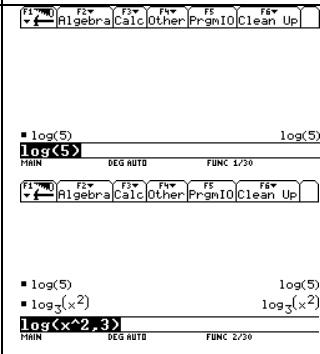
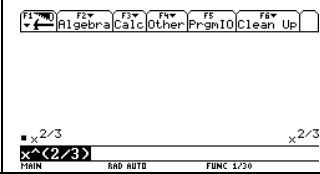
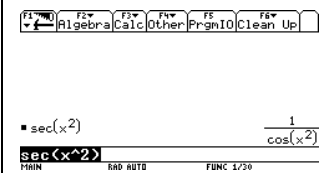
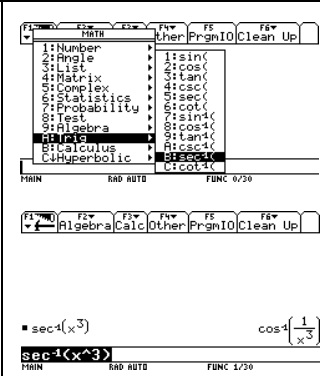
En este manual encontrarás aplicaciones para diversos temas de Ecuaciones Diferenciales, aplicación y forma de resolución de ecuaciones diferenciales de diversos órdenes, un solucionador paso a paso para las mismas.

**Materia para:
Todas las
Ingenierías**

ELABORADO POR:

I.I. ÁNGEL GARCÍAFIGUEROA HERNÁNDEZ

Tabla de funciones matemáticas poco usadas para la TI-V200

Función	Forma de escritura en HOME	Descripción simple	Ejemplo.
Valor absoluto	abs(expr)	Sólo debes teclear esta combinación de letras seguido de los respectivos paréntesis de apertura y cierre con la expresión dentro.	
Logaritmo	log(expr) ó log(expr,base)	Sólo debes teclear esta combinación de letras seguido de los respectivos paréntesis de apertura y cierre con la expresión dentro, seguido de una coma y la base del logaritmo, si se omite se toma como base 10.	
Raíz de cualquier orden $\sqrt[m]{expr^n}$	(expr)^(n/m)	Debes teclear primero la expresión que va a elevarse a la raíz dada, luego el símbolo de potencia y entre paréntesis la división correspondiente de la raíz que tengas.	
Cosecante	csc(expr)	Sólo debes teclear esta combinación de letras seguido de los respectivos paréntesis de apertura y cierre con la expresión dentro.	
Secante	sec(expr)		
Cotangente	cot(expr)		
arc coseno	cos ⁻¹ (expr)	Para las primeras tres funciones simplemente teclaea "2nd" + tecla seno coseno ó tangente correspondiente. Para las últimas 3 debes entrar al menú de funciones trigonométrica con "2nd" + número 5 de la parte numérica y entrar al submenú Trig. y dar ENTER sobre la opción deseada.	
arc seno	sen ⁻¹ (expr)		
arc tangente	tan ⁻¹ (expr)		
arc cosecante	csc ⁻¹ (expr)		
arc secante	sec ⁻¹ (expr)		
arc cotangente	cot ⁻¹ (expr)		

Índice General

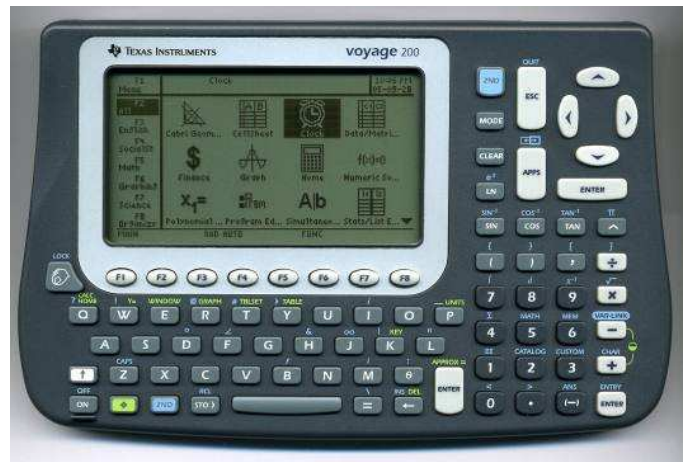
I.	Introducción.....	5
II.	Detalle Técnico.....	7
III.	Detalle General de Teclas.....	9
IV.	Introduciendo datos y expresiones correctamente.....	11
V.	Índice de Ecuaciones Diferenciales.....	21
VI.	Contenido.....	23-45
VII.	Ejercicios propuestos.....	46
VIII.	Bibliografía.....	48

Introducción

Bienvenido al curso **Texas Instruments Voyage200**, éste curso tiene la finalidad de que aprendas el manejo eficiente y práctico de esta calculadora graficadora muy poderosa, ya que posee un gran campo de aplicación en todas las ingenierías y por ende en la mayoría de las materias que verás a lo largo de tu carrera, para que estudies como ingeniero y trabajes como tal.

Esta calculadora si bien tiene mucha funcionalidad y gran ventaja, es importante dejar en claro que **no debe ser usada como un medio de hacer trampa o como un sustituto del aprendizaje impartido por el maestro, sino de un apoyo claro y específico en cada materia** para agilizar cálculos y para entender mejor los temas vistos en clase. Las materias en las que te puede ayudar grandemente de **tronco común (1°, 2° y 3° semestre)** son las siguientes:

1. Química General
2. **Algebra Lineal**
3. **Calculo Diferencial**
4. **Calculo Integral**
5. **Ecuaciones Diferenciales**
6. **Probabilidad y Estadística 1**
7. **Probabilidad y Estadística 2**
8. **Física 1**
9. Física 2
10. Física 3
11. **Fisicoquímica**
12. **Termodinámica**
Y de las demás materias disciplinarias
(Programa Académico de Ingeniería Industrial):
13. Diseño de Experimentos
14. **Computación 2**
15. **Resistencia de Materiales 1**
16. Circuitos Eléctricos 1
17. **Investigación de Operaciones 1**
18. Investigación de Operaciones 2
19. Tecnología de los Materiales
20. **Ingeniería Económica 1**
21. **Ingeniería Económica 2**
22. **Control Estadístico del Proceso**
23. Medición del Trabajo
24. Metrología
25. Administración Financiera



Las materias en **Negritas** son las que recomiendo fuertemente para el uso de esta calculadora porque facilita mucho el trabajo y también existen programas específicos y didácticos para cada una.

PRÉSTAMO

Existen 54 calculadoras TI-V200 disponibles para préstamo en el resguardo de ésta facultad, tú puedes pedir que se te preste de forma inmediata una calculadora, se te presta **gratuitamente** por espacio de **1 mes** y puedes renovar el préstamo cuantas veces desees. Para esto debes acudir con el encargado del material tecnológico y audiovisual, él se encuentra en el segundo piso de la facultad casi enfrente del centro de cómputo junto a la jefatura de Ingeniería Industrial, se atiende de 7:00 A.M. a 2:00 P.M., lo único que necesitas para que te presten la calculadora es lo siguiente:

- Copia de tu credencial de la Universidad
- Copia de tu toma de materias actual
- Copia de tu Inscripción/Reinscripción actual

Como verás es muy sencillo y en definitiva recibes a cambio una gran ayuda.

Detalle Técnico

Cuando pidas prestada una calculadora debes fijarte que contenga:

- ✓ 1 Calculadora
- ✓ 1 Carcasa
- ✓ 4 Pilas AAA recargables ó alcalinas (en caso de estar disponibles)
- ✓ 1 Bolsita protectora

Este es el préstamo básico, sin embargo si tú deseas instalarle algún programa desde tu computadora debes solicitar también:

- ✓ 1 Cable TI-USB Silver-Link

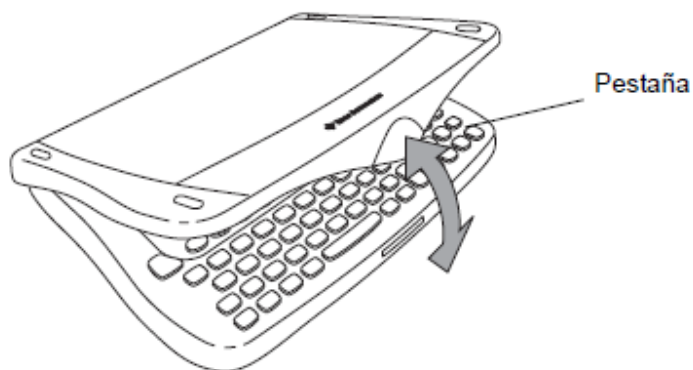
Para instalación de programas complementarios ó extras, consultar el **MANUAL DE INSTALACIÓN DE SOFTWARE PARA CALCULADORA TEXAS INSTRUMENTS VOYAGE 200**.

Pasos al Iniciar sesión:

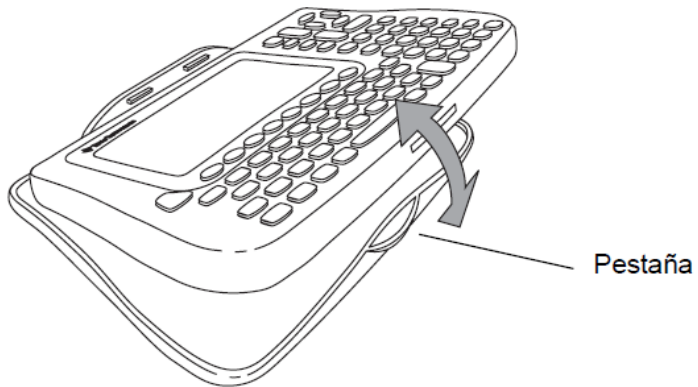
1. Coloca las 4 pilas AAA adecuadamente. Estas se encuentran dentro de la bolsa protectora de la calculadora. La parte donde se colocan las pilas es en la parte posterior de la misma.

IMPORTANTE: No muevas la pila de botón.

2. Retira la carcasa de la calculadora:



3. Colócala por atrás para protegerla mejor.



Detalle General de Teclas



La tecla **DIAMANTE** (una tecla verde al lado de la tecla ON), al presionarla una vez activa todas las teclas que tengan leyenda verde sobre las teclas normales. Su función es múltiple y generalmente te permite desplazarte entre programas y configurar ciertas aplicaciones de la parte gráfica.

La tecla **2nd** (tecla azul al lado de la tecla DIAMANTE), al presionarla una vez activa todas las teclas que tengan leyenda azul. Su función principal es complementar las expresiones numéricas, y en algunos casos entrar a menús avanzados.

Las teclas **F1-F8**, se pueden utilizar cuando en la pantalla aparezcan opciones variadas en la parte superior, generalmente se usan sólo para abrir menús en los programas.

Las teclas del **Cursor** sirven para moverte en gráficas, sobre la línea de entrada y en el historial de Home, así como en otros programas, te irás familiarizando con el poco a poco.

La tecla **APPS**, despliega el menú general de la calculadora, donde se encuentran todas las aplicaciones y programas de la misma.

La tecla **MODE**, despliega la pantalla para modificar la configuración general de la calculadora.

La tecla **Shift**, tiene la misma funcionalidad que la tecla shift del teclado de una computadora, al dejarlo presionado y desplazarte con el cursor de un lado a otro puedes seleccionar una serie de

datos o expresiones para después copiarlos con la combinación DIAMANTE + letra C, y pegarlos en cualquier otra aplicación con la combinación DIAMANTE + letra V.

La tecla **CLEAR** sirve de forma general para borrar la línea de entrada de la calculadora y en algunas otras aplicaciones borra gráficas y elementos marcados para graficar.


La tecla **ESC** se usa para cancelar opciones hechas o errores cometidos dentro de un programa.

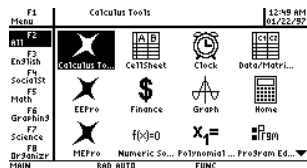
Introduciendo datos y expresiones correctamente

Se ha dedicado un capítulo completo a la explicación de cómo introducir datos y expresiones correctamente debido a que se han identificado numerosos errores de escritura en muchos estudiantes a la hora de teclear los datos, lo cual es de vital importancia ya que de teclear incorrectamente la información nos puede arrojar resultados incorrectos o muy diferentes a lo que queremos en realidad, independientemente del programa en el que estemos éstas reglas son para cualquier aplicación en el que se esté trabajando, es conveniente tomarse un tiempo para entender y practicar estos sencillos ejercicios para que escribas correctamente la información en cada tarea que resuelvas.

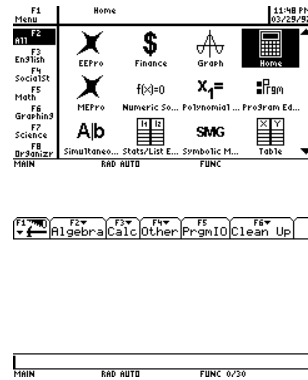
Signo Menos

Es importante que a la hora de teclear una expresión en la calculadora se teclee el signo menos adecuado en cada caso. Se debe seguir la siguiente regla:

“Cuando se escriba una expresión en la que se inicie con signo negativo debe usarse la tecla con signo negativo entre paréntesis ”. Esto mismo se usa con las calculadoras científicas habituales. Veremos un par de ejemplos. Enciende tu calculadora, tecla ON:



Muévete con el cursor a través de las aplicaciones y posíciónate en HOME y da ENTER:

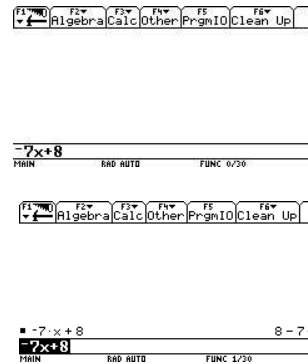


Por ejemplo, si queremos escribir:

$$-7x + 8$$



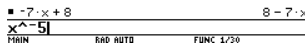
Damos ENTER .



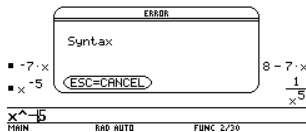
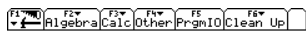
Vemos que se despliega correctamente y se reacomoda en la línea de entrada. Este error del uso del signo menos es muy común y debe usarse ya sea en el inicio de una expresión o en la de un exponente que queramos a una potencia negativa o después de que se ha cerrado un paréntesis. Para borrar la línea de entrada teclaa CLEAR.

Si se hubiera puesto el otro signo menos hubiera salido un resultado completamente diferente e incorrecto. Otro ejemplo:

$$x^{-5}$$



Vemos que se lee correctamente, si hubiéramos puesto el signo contrario:



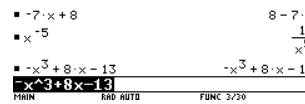
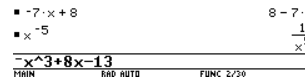
Vemos que nos indica que hay un error de sintaxis en la línea de entrada.

“En cualquier otra posición de una expresión que no sea el inicio, el signo negativo que debe usarse es el de la tecla blanca .”

Por ejemplo:

$$-x^3 + 8x - 13$$

Para el primer término como esta al inicio se usa el signo menos de la tecla negra y para el último término se usa el signo menos de la tecla blanca:



Como tip podemos decir que en la línea de entrada el signo menos de la tecla negra está un poco más pequeño y más arriba que el de la tecla blanca.

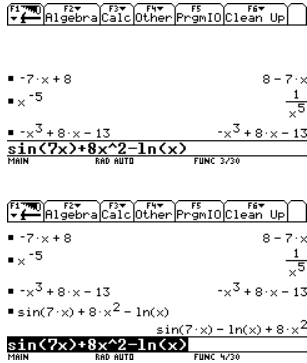
Paréntesis

El uso correcto de los paréntesis es muy importante ya que de igual manera va a definir nuestras expresiones. Los paréntesis dividen expresiones completas en la línea de entrada de la calculadora, hay algunas funciones como la función exponencial, logaritmo natural o las trigonométricas que cuando lo tecleas inmediatamente te abre un paréntesis y lo hace con la finalidad de que definas correctamente lo que va dentro de esa función. Es importante recordar que **“Todo paréntesis que se abre debe cerrarse”**. Por ejemplo supongamos que deseamos escribir:

$$\sin 7x + 8x^2 - \ln x$$

Al teclear la función de seno se abre automáticamente el paréntesis e inmediatamente después debemos escribir

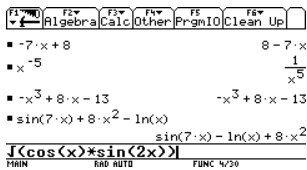
el argumento del seno para después cerrarlo con el paréntesis de cierre:



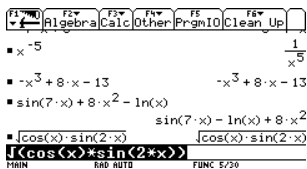
Es importante también cerrar ordenadamente cada paréntesis que se abra, veamos otro ejemplo:

$$\sqrt{\cos x \cdot \sin 2x}$$

Abrimos la raíz dando en 2nd + tecla de signo de multiplicación y si te fijas se abre el paréntesis inmediatamente después del símbolo de la raíz y luego debemos escribir la expresión de adentro y cerrar con el paréntesis final para indicar que todo va dentro de la raíz:



Fíjate en el orden de los paréntesis, el primero es el que encierra a todos los demás, damos ENTER:



Signo de División

Este es otro error algo común a la hora de escribir las expresiones, y hay que seguir otra regla muy simple cuando usamos el signo de división:

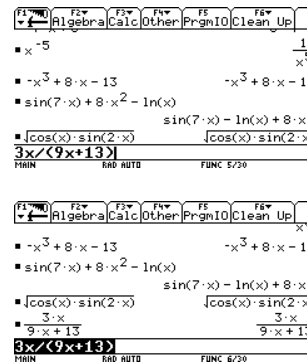
“Cuando haya más de un término en el numerador o denominador en una división, estas expresiones deben encerrarse entre paréntesis”

Por ejemplo si deseamos escribir:

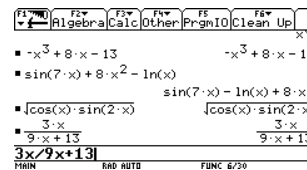
$$\frac{3x}{9x + 13}$$

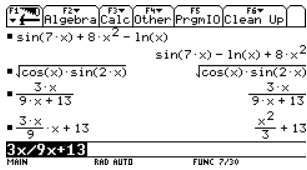
Como hay un solo término en la parte de arriba no es necesario teclear el paréntesis, pero como en la parte de abajo hay más de uno, debemos teclear los paréntesis en la parte de abajo, la forma de escritura se podría resumir con este tip:

(+ de un término)/(+ de un término)



Vemos en la pantalla como se ve correctamente la escritura de la expresión que queremos. ¿Qué hubiera pasado si no ponemos los paréntesis? Observa:



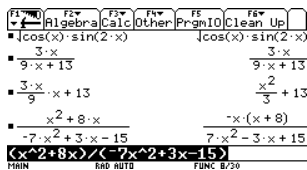
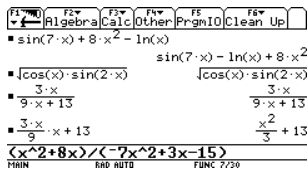


Vemos que al dar ENTER la calculadora entiende otra cosa completamente distinta. Es un muy buen tip que observes lo que escribiste al dar ENTER en la parte izquierda de la pantalla y veas si esa expresión es la que quieres.

Otro ejemplo:

$$\frac{x^2 + 8x}{-7x^2 + 3x - 15}$$

Como en el numerador y denominador hay más de un término deben escribirse ambos paréntesis al inicio y al final de cada expresión, damos ENTER:



Nótese que en el denominador como la expresión inicia con un término con signo negativo se empieza usando el menos de la tecla negra, y el siguiente es con la tecla menos blanca. Recordemos que los paréntesis dividen expresiones completas, por eso aunque este en medio de la línea de entrada se usa el signo negativo negro. También notamos que la calculadora factoriza la parte de arriba y cambia signos

por comodidad, siendo esto una igualdad exacta.

Exponentes

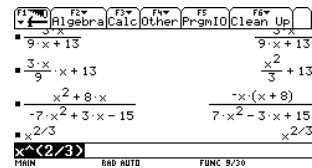
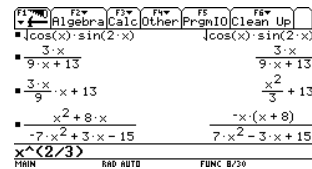
Otro error relativamente común son los exponentes. Por ejemplo si queremos escribir:

$$\sqrt[3]{x^2}$$

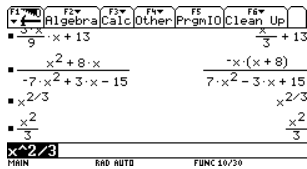
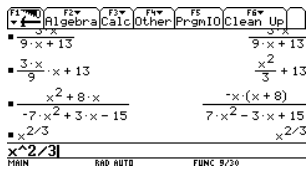
Como veras a simple vista en la calculadora no existe una tecla con raíz cúbica, solo esta la de raíz cuadrada, para escribir una raíz del orden que sea se debe usar el exponente con la sencilla regla:

$$\sqrt[m]{x^n} = x^{n/m}$$

Cuando se escribe un exponente en fracciones en la calculadora, de igual manera debe ponerse entre paréntesis después del símbolo de exponente:



Al dar ENTER vemos la expresión correcta de la equis con su exponente. De igual manera se recalca la importancia de poner entre paréntesis esta expresión ya que de no hacerlo la calculadora entenderá otra cosa, observa:



Vemos que al no ponerlo la calculadora entiende que se trata de una equis cuadrada entre tres y no es la expresión adecuada. Por eso es **MUY IMPORTANTE** el escribir correctamente la información en la calculadora ya que de no hacerlo nos dará resultados incorrectos.

Listas ó Matrices

Cuando escribas en listas o matrices (generalmente las usaras en materias como Algebra Lineal, Investigación de Operaciones 1, Ingeniería Económica 1, Ingeniería Económica 2) es importante que recuerdes que **las comas “,” también dividen expresiones** y por lo tanto si por ejemplo escribes un dato con signo negativo es como si iniciara una nueva expresión y debe teclearse con el signo menos de la tecla negra.

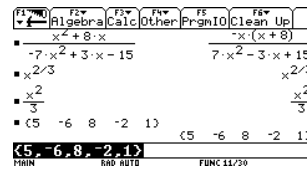
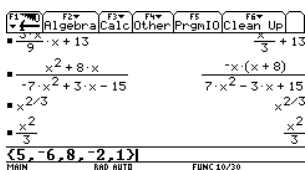
Por ejemplo al escribir la lista:

$$\{5, -6, 8, -2, 1\}$$

Se abren y cierran las llaves tecleando “2nd”

+ paréntesis de apertura o cierre

:



Vemos que al dar ENTER la lista se crea con los datos de signo correctos, de poner el otro signo menos ocurriría un error de sintaxis.

Funciones solve, factor, expand

Si estás trabajando en materias como calculo diferencial, cálculo integral, algebra lineal es posible que te sean útiles éstas funciones. En general se te explicarán en el curso de la materia que tomes si es que te son de ayuda. De todas maneras aquí se te explica un poco de cómo usarlas. Todas estas funciones están en el menú F2 Algebra, al dar ENTER sobre cada una se copia a la línea de entrada para usarse:



Función Solve

La función solve resuelve igualdades o inecuaciones en la línea de entrada de HOME lo único que necesitas es introducir la ecuación en la línea de entrada, la respectiva igualdad o inecuación, luego la respectiva coma e inmediatamente después la variable que deseas que la calculadora encuentre, de esta forma:

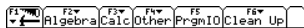
$$\text{solve}(\text{ecuación}, \text{variable})$$

Por ejemplo nos piden encontrar los valores de X que satisfacen la expresión:

$$x^3 + 6x^2 + 5x + 30 = 75$$

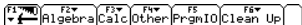
En la línea de entrada de HOME se debe introducir de esta forma:

$$\text{solve}(x^3 + 6x^2 + 5x + 30 = 75, x)$$



`solve(x^3+6x^2+5x+30=75,x)`

Ahora simplemente damos ENTER:



`■ solve(x^3+6·x^2+5·x+30=75,x)`
`■ solve(x^3+6x^2+5x+30=75,x)`

Y se llega al resultado.

Función Factor

La función factor como su nombre lo indica factoriza expresiones (de ser posible) y devuelve la multiplicación adecuada que daría como resultado esa expresión. Su forma de escritura es:

$$\text{factor}(expresion)$$

Como te puedes dar cuenta no tiene ni coma ni variable a buscar ya que no necesita de una variable para encontrar, sino que va a factorizar con las variables que tengas dentro de la expresión. Por ejemplo te piden factorizar la siguiente expresión:

$$x^3 + 9x^2 - 7x - 63$$

Para introducirlo en la línea de entrada de HOME sería así:

$$\text{factor}(x^3 + 9x^2 - 7x - 6)$$



`factor(x^3+9x^2-7x-63)`

Damos ENTER y vemos:



`■ factor(x^3+9·x^2-7·x-63)`
`■ factor(x^3+9x^2-7x-63)`
`(x+9)(x^2-7)`

Nos devuelve la factorización adecuada de binomios que daría como resultado ese polinomio.

Función Expand

La función expand es la función inversa de factor, cuando introduzcas una expresión elevada a una potencia o una multiplicación de expresiones lo que va a hacer es desarrollar esa multiplicación para que la visualices por completo. Su forma de escritura es similar a la de factor:

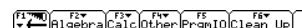
$$\text{expand}(expresión)$$

Por ejemplo supongamos que necesitas desarrollar la expresión:

$$(2x^3 + 9)^3$$

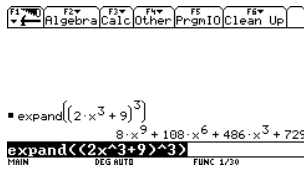
En la línea de entrada de HOME se debe de introducir así:

$$\text{expand}((2x^3 + 9)^3)$$



`expand((2x^3+9)^3)`

Damos ENTER y vemos:



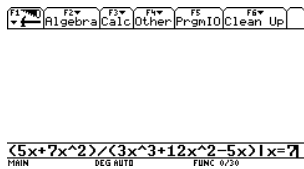
Operador With

El operador “with” es un comando condicionante, en la calculadora se puede combinar con varias funciones de la misma para restringir la búsqueda de una respuesta ó para sustituir un valor en una variable en una expresión dada. Su símbolo es |. Tú puedes combinarlo de la siguiente forma:

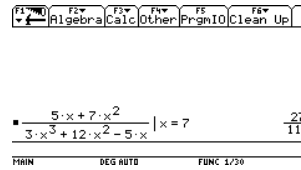
1. Pidiéndole que sustituya un valor en una variable, esto es útil cuando quieres sustituir un valor cualquiera en una expresión grande y tendrías que hacer varias operaciones a mano, por ejemplo:

$$\frac{5x + 7x^2}{3x^3 + 12x^2 - 5x}$$

Y quieres sustituir digamos 7 en donde haya equis y evaluarlo. Primero debes teclear la expresión completa en la línea de entrada y luego teclear este operador, el operador “with” sale tecleando “2nd” + letra K del teclado extendido. En la línea de entrada quedaría así:



Damos ENTER y vemos:



Como puedes ver opera la expresión, también antes de dar ENTER puedes presionar DIAMANTE y te devolverá un valor numérico aproximado.

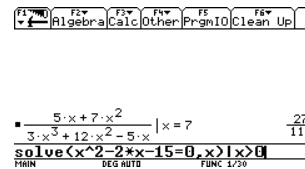
2. También lo puedes usar para restringir la búsqueda de respuestas. Por ejemplo buscas sólo la solución positiva de X para:

$$x^2 - 2x - 15 = 0$$

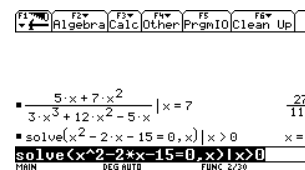
Para ésta igualdad como sabemos ocupamos la función solve y al finalizar de escribir la función restringimos la búsqueda a X>0:

$$solve(x^2 - 2x - 15 = 0, x) | x > 0$$

En la línea de entrada quedaría así:



Damos ENTER y vemos:

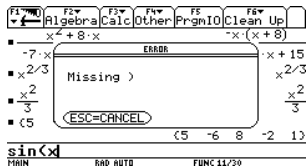


El símbolo de “>” sale con “2nd”+ símbolo de punto de la parte numérica.

Mensajes de Error Comunes

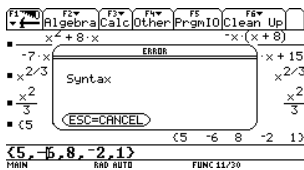
Los mensajes de error comunes suceden cuando en la línea de entrada cometiste un error de sintaxis o que falta una variable o alguna expresión necesaria.

Uno de los más comunes es el mensaje de "Missing)":



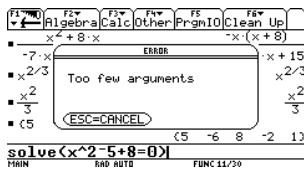
Nos indica que falta un paréntesis ya sea de cierre o apertura en la línea de entrada. Este error hace referencia a la regla que dice "Cada paréntesis que se abre debe cerrarse"

Otro error común es el de "Syntax":



Este error nos indica que hemos escrito algo mal en la línea de entrada, generalmente se debe a los signos negativos, es decir que hemos usado los inadecuados.

También tenemos éste otro error, el de "Too few arguments"



El cual nos indica que hacen falta argumentos para la función, esto se explicará con el uso mismo de los programas y

software para que sepas como y donde ponerlos.

Un último factor importante en el uso de la calculadora es que después de que le des una orden ya sea dando ENTER o con cualquier otra tecla de resolución dejes que la calculadora "piense" o resuelva lo que le has pedido, cuando esta "ocupada" lo dice en la esquina inferior derecha, aparece el recuadro de **BUSY**, lo cual indica que esta ocupada y no debes teclear nada hasta que te devuelva una respuesta.

Borrando Variables

Es importante que de cuando en cuando después de haber usado tu calculadora elimines las variables con valores asignados que se hayan podido guardar en la memoria, esto ocurre algunas veces cuando ocupas la función solve ó cuando usas el **Numeric Solver**, para eliminar las variables estando en HOME simplemente teclaea F6 CleanUp y da ENTER sobre la primera opción "Clear a-z":



TYPE OR USE ++F1 • ENTER) =OK AND (ESC) =CANCEL



MAIN RAD AUTO FUNC 0/30

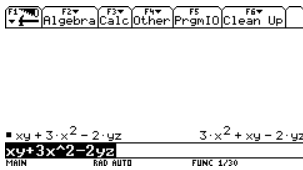
Al hacer esto borras automáticamente todos los valores que podrían contener las variables de la "A" a la "Z". Es importante que hagas esto cuando inicias un nuevo problema.

Multiplicación Implícita de Variables

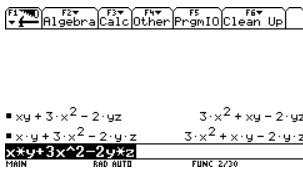
Otro error bastante común a la hora de teclear los datos es que nosotros al escribir a mano damos por hecho la multiplicación implícita de variables en una expresión, por ejemplo al escribir:

$$xy + 3x^3 - 2yz$$

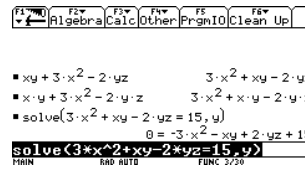
Nosotros por intuición y por lo que nos han enseñado sabemos sin problema que en la primer y último termino hay una multiplicación de variables X por Y y Y por Z. En la Texas debemos especificar ésta división de variables ya que si las tecleamos juntas la Texas pensará que se trata de una variable única llamada XY ó YZ:



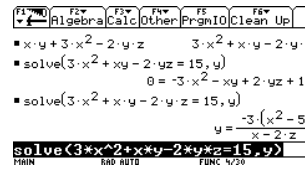
La forma correcta es teclear el signo de multiplicación entre ambas variables:



Podemos ver la diferencia, como tip puedes observar el pequeño punto entre la X y la Y, así como entre la Y y la Z indicando la independencia de cada variable. **Es importante teclear esto correctamente**, ya que en el uso de alguna función podría no reconocer la variable que quieres que resuelva, por ejemplo:



Podemos ver que al resolver una igualación a 15 y pedirle encontrar Y, no existe ésta variable ya que para la Texas solo hay variables X, XY y YZ, lo correcto sería:



Cuando todo falla

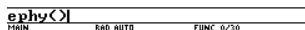
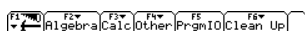
Se ha llegado a ver situaciones en donde la pantalla se “frizea” ó se queda trabada, esto ocurre generalmente cuando no esperaste una respuesta de la misma cuando estaba en estado **BUSY**, siempre debes esperar después de darle un comando de resolución o respuesta (ya sea ENTER o cualquier otro) a que te devuelva un valor o mensaje, **NO LA FUERCES**, se paciente y siempre fijate en el estado de la misma, éste se encuentra siempre activo en la esquina inferior derecha de la pantalla, da siempre un teclazo a la vez y ordenadamente. De todas maneras si se te llegara a trabar presiona al mismo tiempo estas 3 teclas “2nd” + ON + tecla de mano:



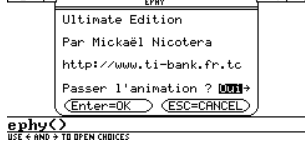
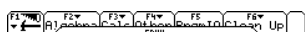
Esto reiniciará la calculadora completamente y sin problemas.

Ephy

Pensando en el gran número de usos en el área de **Química** y sus modalidades combinadas (Fisicoquímica, Termodinámica, Química Orgánica, etc.) instalé en todas las calculadoras una práctica tabla periódica de los elementos que puedes consultar. Para entrar a ella estando en HOME teclea en la línea de entrada la combinación “EPHY()” y da ENTER:



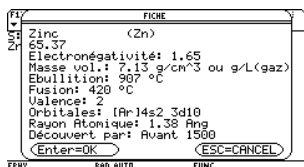
Da ENTER nuevamente para continuar:



Y verás:



Y puedes desplazarte por cada elemento, y para ver su información da ENTER sobre el símbolo del elemento que deseas ver y verás su ficha completa:

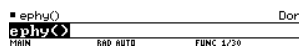


La desventaja es que está en francés, pero los símbolos químicos no cambian, son

iguales para todos, además de que es bastante entendible, la información es explícita, la información de cada elemento es la siguiente:

- Nombre
- Masa Atómica
- Electronegatividad
- Densidad (gr/cm³)
- Punto de Ebullición (°C)
- Punto de Fusión (°C)
- Valencia
- Configuración Electrónica
- Radio Atómico
- Por quién fue descubierto y en que año.

Para salir de la tabla simplemente da ESC:



Índice de Ecuaciones Diferenciales

Capítulo 1	Ecuaciones Diferenciales de primer y segundo grado	
1.1	Primeros Problemas.....	23
1.2	Resolviendo E.D. en HOME (solución general).....	33
1.3	Resolviendo E.D. en HOME (solución particular).....	36
Capítulo 2	Ecuaciones diferenciales de orden superior (mayor que 2do grado.)	
2.1	Resolviendo con DeSolveN (paso a paso).....	38

Primeros Problemas


Vamos a empezar uno de los cursos más complejos en las carreras de ingeniería, la materia de ecuaciones diferenciales es una materia algo compleja y más si no pasaste adecuadamente calculo diferencial y cálculo integral, ésta herramienta te será de gran ayuda en ésta materia, te podrá ir ayudando a resolver ecuaciones diferenciales paso a paso y se resolverán algunos de los problemas tipo-comunes que dejan en el curso que imparten los profesores y veas de que forma te puede ayudar. Pues sin más ni más vamos a comenzar.

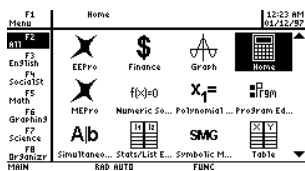
En las primeras clases de ecuaciones diferenciales después de la obligada teoría y conceptos de lo que son las ecuaciones diferenciales, quizá te pongan a resolver demostraciones tales como:


Demuestre que la función:

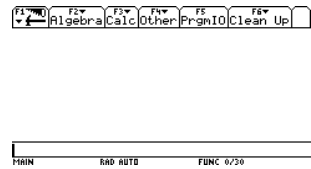
$y = 8 \cdot e^x + x \cdot e^x$, es una solución de la ecuación diferencial $y'' - 2y' + y = 0$.

Ok la Texas te puede ayudar de 2 formas a hacer éste tipo de problemas, uno es simplemente viendo el resultado (es decir la comprobación inmediata) y otro es haciendo las derivadas que se tienen que hacer para llegar al resultado como pasos intermedios del procedimiento. Primero veremos la comprobación inmediata.

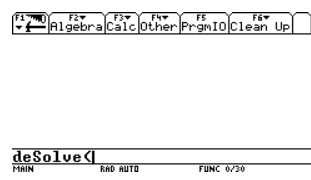
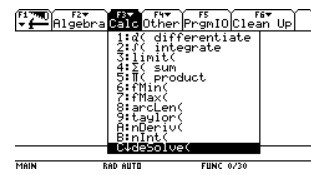
Enciende tu calculadora tecla 



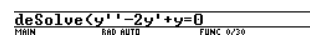
Muévete con las flechas de desplazamiento (←, →, ↑, ↓) y posíciónate sobre el ícono de HOME (como referencia tiene el ícono de una calculadora pequeña) y da ENTER :



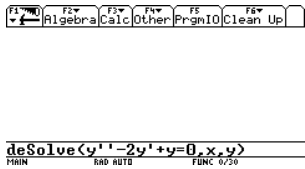
Ahora para ver el resultado (comprobación), deberíamos según la lógica simplemente resolverla ecuación diferencial y el resultado debería ser la función, para hacer esto debemos llamar la función “DeSolve(”, se encuentra en el menú F3 de “Calculo” casi al final de la lista, la seleccionamos y damos ENTER:



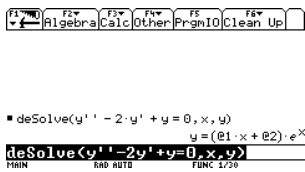
Vemos que se copia a la línea de entrada la función y ahora simplemente tecleamos tal cual la ecuación diferencial que nos dan, el símbolo de la “ ‘ ” prima, sale presionando “2nd” + letra B del teclado extendido, para el primer término como es biprima debemos llamar 2 veces éste símbolo:



Es importante que recuerdes que cuando uses esta función debe tener el símbolo del igual en tu ecuación, una vez que se termina de escribir la expresión tecleamos “,x,y”.



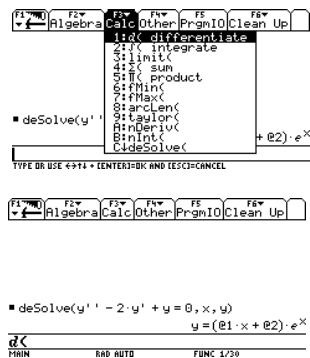
Con la primera coma le estamos diciendo a la calculadora que se termina de escribir la expresión, la variable siguiente es la variable independiente e inmediatamente después otra coma y a continuación la variable dependiente, por comodidad usamos la X e Y, pero puede ser la variable que quieras, claro ésta que la variable dependiente debe estar en la ecuación. Damos ENTER y vemos:



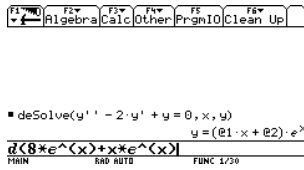
Ok aquí haremos un par de pausas para explicar un poco el resultado y como debes interpretarlo. Los símbolo de “arroba1” y “arroba2”, hacen referencia a las constantes, es decir C1 y C2, tu las ves con esa nomenclatura de C1 y C2 en clase, la Texas la maneja con “arroba#”. La cronología de las constantes se va guardando en el historial, es decir si tu resuelves otro ejercicio en la misma línea de entrada verás “arroba3” y “arroba4”, es sólo el orden que lleva la calculadora en las constantes que se crean, pero **NO SIMBOLIZAN UN NÚMERO A MULTIPLICAR u OPERAR**, tu solo debes hacer la relación que “arroba3” sería tu C1 y “arroba4” sería tu C2. Otra cosa que es importante a la hora de resolver estos problemas, es que el solucionador

instantáneo de HOME te devolverá el resultado factorizado y/o simplificado de ser posible, aquí vemos que está factorizada la e^x , el cual vemos que es correcto y concuerda con la expresión de la función ya que en ambos términos esta la e^x . Y la última cosa que debes considerar es que los valores de C1 y C2 pueden tomar un valor numérico real cualquiera, es por esto que los valores de 8 y 1 que corresponden al coeficiente del primer y segundo término respectivamente pueden darnos una solución al problema, sin embargo podría haber sido cualquier otro número, otra solución podría haber sido con 4 y 2 ($y = 4 \cdot e^x + 2x \cdot e^x$), o muchas otras soluciones posibles, sólo debes fijarte que la solución de los términos con las respectivas expresiones importantes, es decir las exponenciales o los signos ó los logaritmos etc., sean los correctos. Esta solución fue una solución general de ecuaciones diferenciales, las cuales verás más adelante.

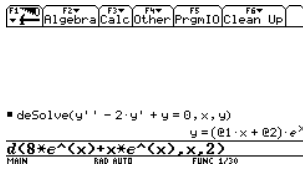
Ahora bien la otra parte en donde la Texas te puede ayudar es haciendo las derivadas que tendrías que hacer para después sustituirlas en la ecuación diferencial y comprobar la igualdad. Borra la línea de entrada con la tecla CLEAR. Para derivar la expresión debes sacar la función “d(“ que se encuentra en el menú de “Calculo” F3, la seleccionamos y damos ENTER:



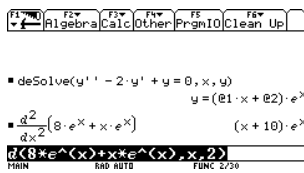
Se copia a la línea de entrada y ahora simplemente tecleamos la expresión:



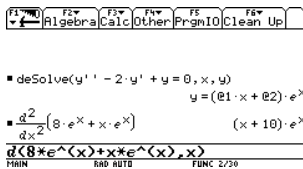
Ahora tecleamos la coma e inmediatamente después la equis para indicarle que es respecto a equis la derivación, ahora antes de terminar tecleamos una coma extra y el número 2 para indicarle que es la segunda derivada correspondiente a y'', y cerramos todo con un paréntesis:



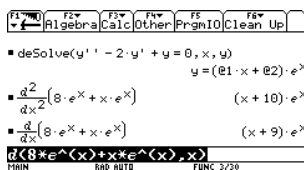
Y damos ENTER:



Vemos que nos despliega el resultado inmediatamente de la segunda derivada. Así de sencillo puedes comprobar tu respuesta a mano. Ahora para que resuelva la primera derivada, solo quitamos la sombra dando con el cursor a la derecha y borramos la última "2":

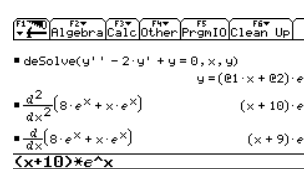
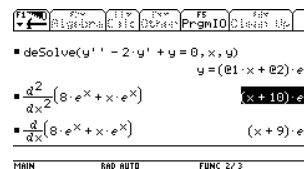


Y damos ENTER:

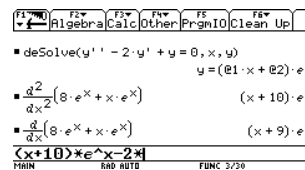


Es importante recordar que el resultado de la calculadora siempre te lo dará de la forma más simplificada y factorizada posible.

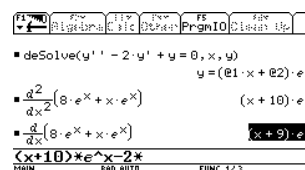
Ahora ya que tenemos todos los términos como sabemos debemos sustituirlos en la expresión de la ecuación diferencial resultado. Borramos la línea de entrada con tecla CLEAR y empezando con la y'' sombreamos éste resultado dando hacia arriba con el cursor y damos ENTER para que se copie a la línea de entrada:

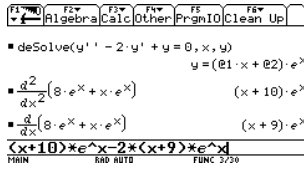


Se copia y continuamos escribiendo en la línea la ecuación diferencial resultado, es decir el signo menos 2 luego el signo de multiplicación:

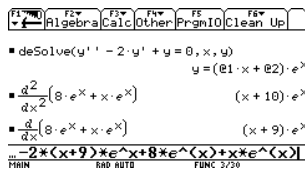


Y nos desplazamos con el cursor hacia arriba hasta encontrar la primera derivada, la sombreamos y damos ENTER para que se copie en la línea de entrada:

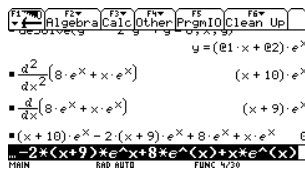




Y continuamos escribiendo la ecuación diferencial resultado, lo que sigue es el “+Y”, por lo tanto tecleamos el signo “+” y luego Y corresponde a la función original, la cual tecleamos:



Damos ENTER y vemos:



El resultado es cero, lo cual cumple con la igualdad de la expresión $y'' - 2y' + y = 0$.

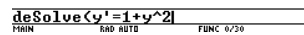
De esta forma puedes comprobar tus resultados y a la vez hacer las derivadas del orden que sea como ya hemos explicado. Borramos el historial con F1 y opción 8 “Clear Home”

Otro tipo de ejercicios que quizá te puedan dejar son del tipo:

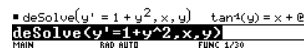
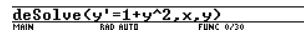
Dada la Ec. Diferencial, su solución y las condiciones iniciales, determinar el valor de las constantes arbitrarias:

$$\begin{cases} y' = 1 + y^2 \\ y = \tan(x + c) \\ y(\pi/4) = 1 \end{cases}$$

Este tipo de ejercicios en realidad son muy sencillos de resolver a mano, sin embargo en ocasiones tienen problemas a la hora de despejar las ecuaciones. Primero le pedimos que nos devuelva la solución general de la misma forma como hicimos los ejercicios anteriores, sacamos la función de “DeSolve(“del menú F3 de calculo y tecleamos tal cual la ecuación diferencial:

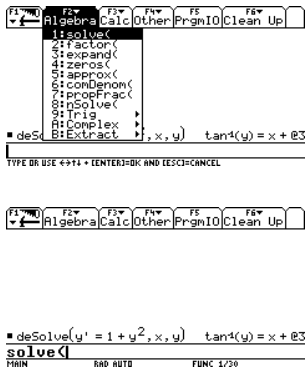


Y como ya sabemos inmediatamente después “,x,y)” y damos ENTER:

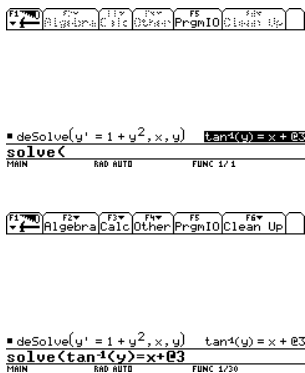


Y vemos que el resultado concuerda con el de la solución que marca el problema, recuerda que la “arroba3” hace referencia a una constante cualquiera, no debes confundirla, para nosotros es nuestra C1 ó

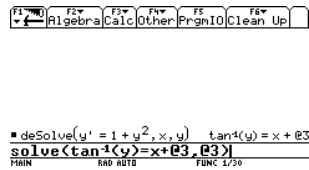
simplemente C. Borrarnos la línea de entrada y ahora para que resuelva la ecuación llamamos a la función “solve(“ que resuelve igualdades, se encuentra en el menú F2 de “Algebra” en la primera opción y damos ENTER para que se copie a la línea de entrada:



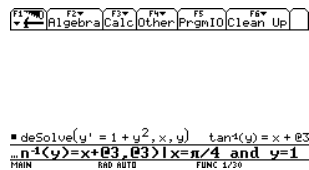
Ahora simplemente sombreamos la ecuación resultado sombreándola dando una vez hacia arriba con el cursor y damos ENTER para que se copie a la línea de entrada:



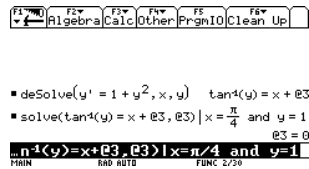
Como ya esta escrita nuestra igualdad, ahora tecleamos “,” coma e inmediatamente después el valor que queremos que encuentre, en éste caso corresponde a “@3”, así que lo tecleamos de esta manera, el símbolo de arroba sale con “2nd” + letra R del teclado extendido:



Y cerramos con paréntesis, ahora para indicarle los valores iniciales, tecleamos “2nd” + letra K del teclado extendido y sale el operador with y le asignamos los valores que nos muestran, (x=pi/4 and y=1):



Con esto le decimos a la calculadora que después de despejar la constante queremos que le asigne los valores de pi/4 a X y 1 a Y, debe haber un espacio entre cada asignación que se obtiene con la barra espaciadora, damos ENTER y vemos:



Y vemos que el valor de la constante es 0.

Ahora bien un último tipo de problemas que les dejan antes de pasar a resolver las ecuaciones diferenciales de verdad, son los siguientes.

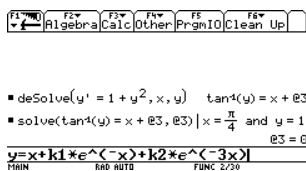
Te dan una ecuación en términos generalmente de constantes y exponenciales y te piden encontrar la ecuación diferencial adecuada que representa esa solución general. Por ejemplo, dada la expresión:

$$y = x + C1 \cdot e^{-x} + C2 \cdot e^{-3x}$$

Encuentre la ecuación diferencial que representa esta solución general.

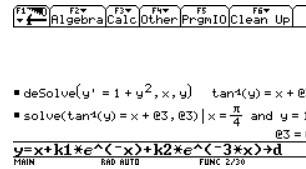
Como puedes ver aquí es al revés, te dan el resultado y debes encontrar la ecuación diferencial del cual se obtuvo.

De igual forma el procedimiento primero para resolver este problema es derivar el número de veces que tengas de constantes, es decir, se deriva una vez (y') y luego dos veces (y''), luego se busca un numero que al multiplicarlo y luego sumarlo elimine las constantes. Primero lo que hacemos en la Texas es teclear tal cual la expresión original que nos dan en la línea de entrada, solo haremos un pequeño cambio en las constantes C1 y C2 y para nosotros serán k1 y k2:

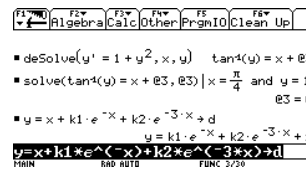


Ya que terminamos de escribir nuestra primera expresión (recuerda que la función exponencial sale presionando "2nd"+ tecla de LN) para asignar esta ecuación con un nombre cualquiera presionamos tecla STO y

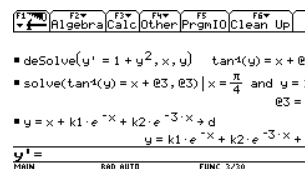
a continuación el nombre de la variable que queramos, vamos a llamarla "d":



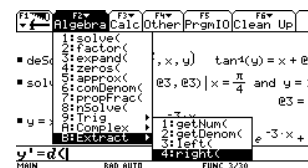
Damos ENTER y vemos:



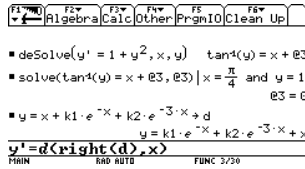
Se lo asigna correctamente. Ahora debemos derivar esta expresión 1 vez y asignarla a y' que en nuestro caso será "d1" (indicando la primera derivada). Para esto borramos la línea de entrada con tecla CLEAR y tecleamos y'=, recuerda que el símbolo de la "prima" sale con "2nd" + letra B del teclado extendido:



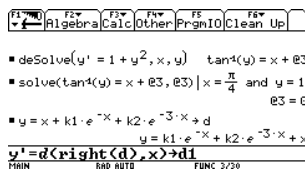
Luego la función de derivada del menú de "Calculo" F3 y la primera opción, e inmediatamente después vamos a llamar la función de "right(", esta función extrae de una expresión el lado derecho de la igualdad, en nuestro caso de la expresión que nombramos con "d" y que corresponde a la derivada, ésta función sale del menú de álgebra, luego el submenú de Extract y "right(":



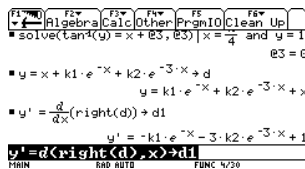
Con ENTER se copia a la línea de entrada y ahora simplemente tecleamos la letra “d”, cerramos el paréntesis de la función “right(”, luego “x)” para cerrar la función de derivación:



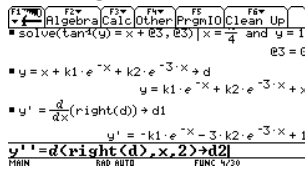
E inmediatamente después como vamos a llamar ésta expresión, la llamaremos “d1”, como sabemos se lo asignamos con la tecla STO e inmediatamente después la combinación “d1”:



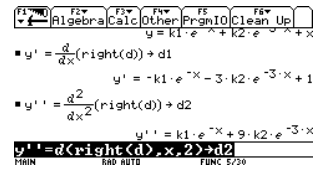
Y Damos ENTER:



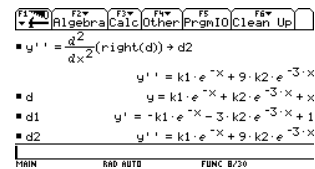
Y ya asigno la expresión y corresponde a la primera derivada, ahora bien, aquí mismo sin mover nada podemos encontrar la segunda derivada y asignársela a “d2”, para esto, simplemente desombreamos la expresión resultado y cambiamos las variables correspondientes que sería d2 por d1, y’ por y’ y en la función de derivada una coma extra y el número 2 para indicar que queremos la segunda derivada:



Damos ENTER y vemos:



Y listo vemos la segunda derivada asignada a la variable “d2”. Borramos la línea de entrada con la tecla CLEAR y ahora para ver las 3 expresiones juntas tecleamos cada variable seguida de un ENTER:



Ahora lo que sigue es encontrar la combinación de números adecuada que harían que a la hora de sumarse las constantes éstas se eliminen y quede una ecuación diferencial, aquí hay 2 formas de encontrar estos valores: las forma fácil que es con el determinante y la forma difícil que es con un sistema de ecuaciones lineales, vamos a mostrar ambas formas, empezaremos con la forma fácil:

Forma Fácil

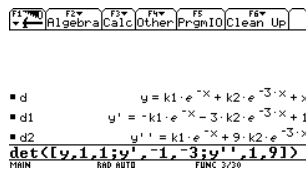
Primero lo que se debe hacer es identificar la determinante a calcular, en primer lugar nos damos cuenta que es una matriz de 3 por 3 ya que son 3 expresiones, luego como “regla” la primer columna de esta matriz siempre serán los valores de y, y’, y’’ (siempre de acuerdo al número de derivadas que tengas, si llegan a ser 4 se extendería hasta y’’’ y así sucesivamente), los valores correspondientes de la segunda columna serán los coeficientes que sean correspondientes a la constante 1, y los de la

tercer columna los valores correspondientes a la constante 2 (recuerda esto siempre de acuerdo al número de constantes que tengas), de modo que quede así:

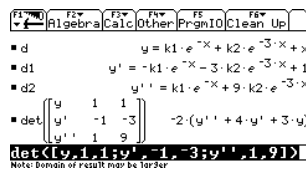
$$\begin{bmatrix} y & 1 & 1 \\ y' & -1 & -3 \\ y'' & 1 & 9 \end{bmatrix}$$

Sin tomar en cuenta los términos que quedan solos en la ecuación. Y hacemos el determinante en la calculadora, tecleamos en la línea de entrada la función “det(“, abrimos corchetes con “2nd” + tecla coma y tecleamos cada elemento separado por comas y para saltarnos a la siguiente línea con “;” que sale con “2nd” + letra M del teclado extendido, de modo que quede así en la línea de entrada:

det ([y, 1, 1; y', -1, -3; y'', 1, 9])



Recuerda que los símbolos de apertura y cierre de corchetes salen con “2nd” + teclas coma y división respectivamente y el símbolo de “prima” sale con “2nd” + letra B del teclado extendido y los signos negativos van con signo menos de tecla negra y que debes terminar al final con paréntesis de cierre. Damos ENTER y vemos:

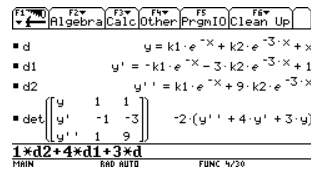


Y vemos los valores que buscábamos ya encontrados factorizados dentro del paréntesis, siempre debes hacer caso de los

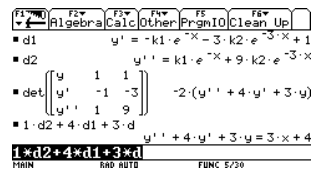
valores que se encuentran dentro de la factorización, el resultado se interpreta de la siguiente manera: debes tomar como valor a multiplicar el coeficiente de cada y, y' ó y'' que se encuentre dentro de esta factorización, tomamos entonces:

$$y'' \rightarrow 1 \quad y' \rightarrow 4 \quad y \rightarrow 3$$

Por lo tanto para encontrar por fin la ecuación diferencial de la solución que nos dan borramos primero la línea de entrada con tecla CLEAR y multiplicamos cada valor encontrado por las expresiones que ya teníamos guardadas en d, d1 y d2 correspondientes a cada y, y', y'':



Damos ENTER y vemos:



Y ésta es la ecuación diferencial que estábamos buscando y es el resultado.

Forma difícil

En la Texas se puede representar como un sistema de ecuaciones de 2x2 simple para encontrar éstos valores. Para esto simplemente debemos primero saber que los términos que nos interesan eliminar son los términos de las constantes los otros por ahora no nos interesan. Vamos ver los valores como una matriz de datos:

$$\begin{matrix} d \\ d1 \\ d2 \end{matrix} \begin{cases} k1 \cdot e^{-x} + k2 \cdot e^{-3x} \\ -k1 \cdot e^{-x} - 3 \cdot k2 \cdot e^{-3x} \\ k1 \cdot e^{-x} + 9 \cdot k2 \cdot e^{-3x} \end{cases}$$

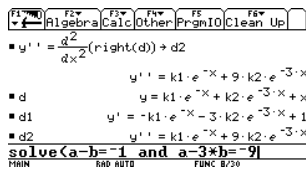
Podemos ver que los términos son los mismos, contienen las mismas expresiones por lo tanto podemos hacer una suma de términos sin problemas. Entonces podemos dejar asignados los valores de la siguiente manera:

$$\begin{matrix} a & \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \\ b & \end{matrix}$$

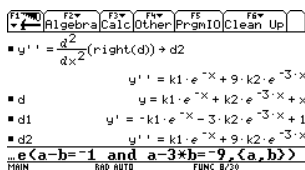
Ahora simplemente asignamos una variable "a" y "b" para que la suma de la primera columna sea igual la última fila:

$$\begin{cases} a - b = -1 \\ a - 3b = -9 \end{cases}$$

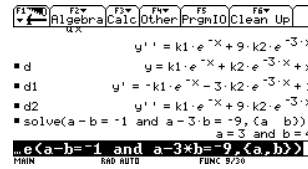
Te preguntará porque se cambiaron los signos de la última fila y la razón es que para que a la hora de sumarse se eliminen. En la Texas podemos encontrar éstos valores con la función solve:



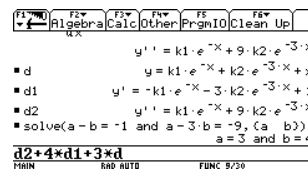
Llamamos la función del menú de Algebra F2 y en la primera opción, luego tecleamos la primera ecuación y luego la segunda separado por el operador "and" con espacio al inicio y al final, para finalizar tecleamos "{a,b}", con esto le pedimos que encuentre las 2 variables a y b:



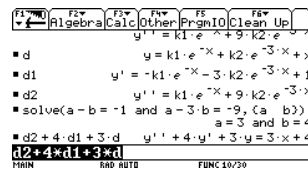
Recuerda que los símbolos de "llave" salen con "2nd" + tecla paréntesis de apertura y cierre, damos ENTER y vemos:



Y vemos los valores de 3 y 4. Ahora para operar el resultado como ya teníamos guardado las expresiones con las variables "d", borramos la línea de entrada y tecleamos cada "d" multiplicada por su valor encontrado, recuerda que el único que quedo libre es d2:



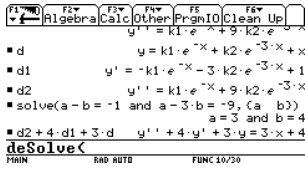
Damos ENTER y vemos:



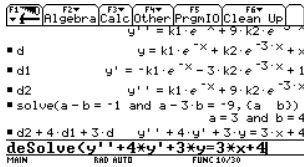
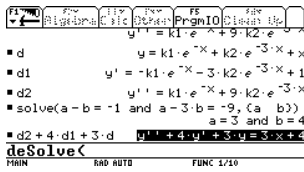
Vemos el resultado correspondiente y que se eliminaron correctamente las constantes.

Comprobación

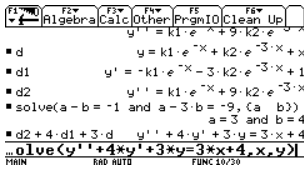
Ahora para comprobar nuestro resultado simplemente borramos la línea de entrada y llamamos la función DeSolve para resolver la ecuación diferencial, si lo que hicimos está bien, el resultado debe ser la solución principal que nos habían dado al inicio:



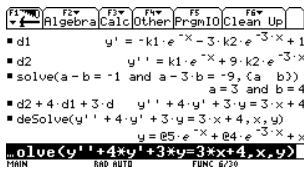
Ahora damos una vez arriba con el cursor para sombrear el resultado y damos ENTER para que se copie directamente a la línea de entrada:



Ahora simplemente terminamos como ya sabemos con “,x,y)”:



Damos ENTER y vemos:



El resultado concuerda con la solución general que nos daban al principio, recuerda que “arroba#” es solo la cronología que lleva la calculadora de las constantes que se han creado tu debes interpretarla como C1 y C2 correspondientes a @4 y @5. Borrarnos todo con F1 y opción 8 CLEAR HOME. Al hacer esto todas las @# vuelven a empezar desde 1.

Resolviendo E.D. en HOME (solución general)

Ahora vamos a pasar de lleno a resolver las ecuaciones diferenciales, como ya te habrán enseñado hay 3 tipos de soluciones, la general, la particular y en algunos casos soluciones singulares. Vamos a explicar como debes transformar e introducir correctamente en la Texas la ecuación diferencial para que te devuelva el resultado inmediato. **NOTA IMPORTANTE:** El software de la Texas sólo puede resolver ecuaciones diferenciales de primer (y') y segundo orden (y''), para ecuaciones de orden superiores se debe usar otro programa externo que se mostrará más adelante. Tú puedes usar el que prefieras, yo recomiendo que inicies con éste de **HOME ya que no tiene limitaciones**, además de que en los cursos de ecuaciones diferenciales generalmente no pasan de resolver ecuaciones de segundo orden.

Ahora bien cuando se hace un ejercicio de ecuaciones diferenciales generalmente te lo pueden dar de 2 formas, vamos a empezar con este, te piden solución general:

$$(y^2 + 3)dx + (2xy - 4)dy = 0$$

Ok ahora debes saber una cosa, para introducir ecuaciones diferenciales en la Texas como habrás visto con los ejercicios anteriores se debe teclear una variable con la "prima" (y') ó (y'') etc. En este ejemplo no te lo dan a simple vista sólo debes hacer un pequeño despeje para encontrarlo, divides todo entre dx:

$$\frac{(y^2 + 3)dx + (2xy - 4)dy}{dx} = 0$$

Y nos queda:

$$(y^2 + 3) + (2xy - 4) \frac{dy}{dx} = 0$$

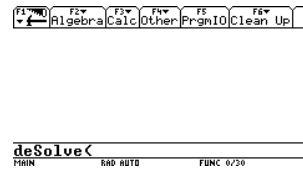
Se elimina la dx del primer término, al cero no le afecta ya que cero entre lo que sea es cero y nos queda únicamente una dy/dx, ésta es nuestra y', debes saber que:

$$\frac{dy}{dx} = y'$$

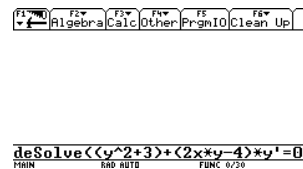
Como ya tenemos nuestra variable con "prima", ya podemos introducir nuestra ecuación así:

$$(y^2 + 3) + (2xy - 4) \cdot y' = 0$$

Primero como ya sabemos llamamos la función "desolve(" del menú de calculo y la opción C:

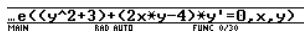
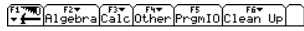


Ahora simplemente tecleamos tal cual la ecuación:

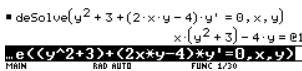


Debes teclear correctamente la información, recuerda que para el término "2xy" debe haber un signo de multiplicación entre x e y, ya que de no ponerlo la calculadora pensaría que se trata de unas sola variable "xy", también recuerda que el símbolo de "prima"

sale con "2nd"+ letra B del teclado extendido. Para terminar como ya sabemos, primero una coma e inmediatamente después la variable independiente, luego otra coma e inmediatamente después la variable dependiente ",x,y)":



Damos ENTER y vemos:



Y vemos el resultado inmediato de una solución general de esa ecuación diferencial. Recuerda que la Texas siempre te dará el resultado lo más simplificado y/o factorizado de ser posible, debes considerar esto en tus resultados, a la hora de compararlos.

Esta ecuación que hicimos es una ecuación diferencial es exacta (un concepto que te lo debe explicar tu profesor), pero en realidad pudimos haber usado también la otra variable, es decir dividir todo entre dy:

$$\frac{(y^2 + 3)dx + (2xy - 4)dy}{dy} = 0$$

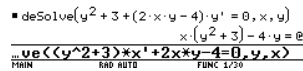
Y que nos quedara:

$$(y^2 + 3) \frac{dx}{dy} + (2xy - 4) = 0$$

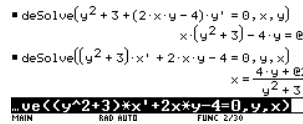
Y sustituir la dx/dy por x':

$$(y^2 + 3) \cdot x' + (2xy - 4) = 0$$

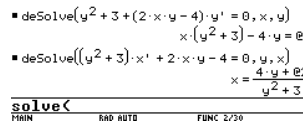
Y de igual forma haber usado esta ecuación para resolver en la calculadora, con la diferencia de que la variable independiente sería en este caso "y" y la dependiente "x":



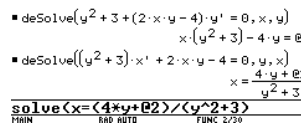
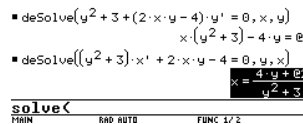
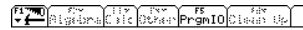
Damos ENTER y vemos:



Este resultado a simple vista parece diferente pero haciendo el despeje de @2 vemos el resultado, para esto desplegamos del menú de algebra la función solve:



Y damos arriba con el cursor una vez para sombrear el resultado, damos ENTER y se copia:



Ahora para

pedirle que despeje @2, simplemente tecleamos “,@2”:

```

F1  F2  F3  F4  F5  F6
|-----|
| Algebra | Calc | Other | PrgmIO | Clean Up |
|-----|
▪ deSolve(y^2+3+(2*x*y-4)*y'=0,x,y)
  x:(y^2+3)-4*y=@1
▪ deSolve((y^2+3)*x'+2*x*y-4=0,y,x)
  x=(4*y+@2)/(y^2+3)
solve(x=(4*y+@2)/(y^2+3),@2)
MAIN  RAD AUTO  FUNC 2/30
    
```

Recuerda que la @ sale con “2nd” + letra R del teclado extendido, damos ENTER y vemos:

```

F1  F2  F3  F4  F5  F6
|-----|
| Algebra | Calc | Other | PrgmIO | Clean Up |
|-----|
▪ deSolve((y^2+3)*x'+2*x*y-4=0,y,x)
  x=(4*y+@2)/(y^2+3)
▪ solve(x=(4*y+@2)/(y^2+3),@2)
  @2=x*(y^2+3)-4*y
solve(x=(4*y+@2)/(y^2+3),@2)
MAIN  RAD AUTO  FUNC 3/30
    
```

Como puedes ver es lo mismo en ambos resultados. Tú puedes hacer la prueba de si es exacta o no simplemente derivando respecto a su “dn” contraria y viendo si son iguales, lo puedes hacer en la Texas con la igualdad y la función de derivación respectiva de cada lado y te devolverá si es verdadero o falso:

```

F1  F2  F3  F4  F5  F6
|-----|
| Algebra | Calc | Other | PrgmIO | Clean Up |
|-----|
▪ deSolve((y^2+3)*x'+2*x*y-4=0,y,x)
  x=(4*y+@2)/(y^2+3)
▪ solve(x=(4*y+@2)/(y^2+3),@2)
  @2=x*(y^2+3)-4*y
d(y^2+3,y)=d(2*x*y-4,x)
MAIN  RAD AUTO  FUNC 3/30
    
```

Damos ENTER y vemos:

```

F1  F2  F3  F4  F5  F6
|-----|
| Algebra | Calc | Other | PrgmIO | Clean Up |
|-----|
▪ solve(x=(4*y+@2)/(y^2+3),@2)
  @2=x*(y^2+3)-4*y
▪ d(y^2+3,y)=d(2*x*y-4,x)
  true
d(y^2+3,y)=d(2*x*y-4,x)
MAIN  RAD AUTO  FUNC 4/30
    
```

Vemos la derivación de cada lado y de lado derecho la palabra “true” que nos indica que la igualdad es exacta por lo tanto se cumple y comprobamos que la ecuación diferencial es exacta y podemos hacer lo anterior de dividir

ya sea todo entre dx o dy para utilizar nuestra x’ ó y’. En realidad no importa cual de las 2 variables ocupemos, siempre y cuando nuestro despeje esté bien y en la función pongamos adecuadamente la variable independiente y dependiente, recuerda que la variable dependiente siempre será la “prima”.

De esta forma puedes comprobar tus resultados hechos a mano con una excelente precisión. Estas repito son soluciones generales.

La otra forma como te ponen generalmente las ecuaciones diferenciales con las variables con “primas” directas, de ésta forma:

$$(2xy + 2y^2 + x^2 + y^2)y' + 2x^2 + 2xy + x^2 + y^2 = 0$$

Como puedes ver cuando tienes ecuaciones así te hacen la vida más sencilla ya que la y’ ya esta lista para introducirse y ésta variable representa la variable dependiente, en la Texas la introduciríamos así:

```

F1  F2  F3  F4  F5  F6
|-----|
| Algebra | Calc | Other | PrgmIO | Clean Up |
|-----|
Solve((2*x*y+2*y^2+x^2+y^2)*y'+
MAIN  RAD AUTO  FUNC 0/30
    
```

Hasta ahí la primera expresión, y terminamos así:

```

F1  F2  F3  F4  F5  F6
|-----|
| Algebra | Calc | Other | PrgmIO | Clean Up |
|-----|
*y'+2*x^2+2*x*y+x^2+y^2=0,x,y)
MAIN  RAD AUTO  FUNC 0/30
    
```

Damos ENTER y vemos:

```

F1  F2  F3  F4  F5  F6
|-----|
| Algebra | Calc | Other | PrgmIO | Clean Up |
|-----|
deSolve((2*x*y+2*y^2+x^2+y^2)*y'+2*x^2+
MAIN  RAD AUTO  FUNC 1/30
    
```

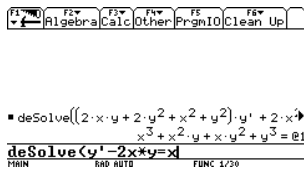
Resolviendo E.D. en HOME (solución particular)

En la parte anterior vimos como resolver soluciones generales (con constantes), para resolver soluciones particulares generalmente te dan una condición inicial de la ecuación diferencial, por ejemplo:

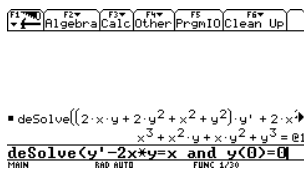
Determinar la solución del problema con valor inicial dado por

$$\frac{dy}{dx} - 2xy = x \text{ con } y(0) = 0$$

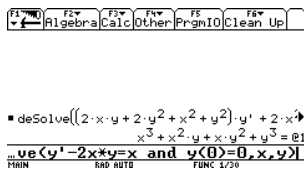
Aquí de igual manera primero interpretamos la dy/dx como ya sabemos como nuestra y', la introducimos tal cual con la función deSolve que ya conocemos:



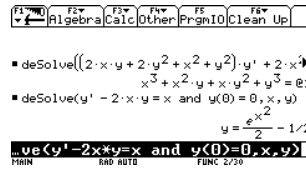
Ahora para indicarle la condición inicial dejamos un espacio con la barra espaciadora, luego tecleamos la combinación “and” (“y” en inglés) dejamos otro espacio y tecleamos tal cual la condición inicial que nos dan:



Y terminamos como ya sabemos con “,x,y)”:



Damos ENTER y vemos:



Vemos el resultado inmediato. También es bueno saber que puedes introducirle 2 condiciones iniciales si es que te las dan en tu problema, por ejemplo:

Hallar la solución particular de la ecuación:

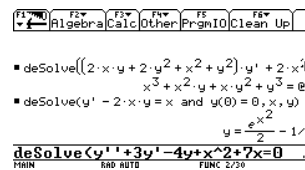
$$y'' + 3y' - 4y + x^2 + 7x = 0$$

Que satisface a las condiciones iniciales:

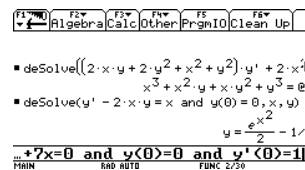
$$y(0) = 0$$

$$y'(0) = 1$$

De igual forma la información se introduce tal cual en la línea de entrada llamando la función DeSolve:



Y terminamos de igual forma, con el operador “and” y la condición inicial 1 y después “and” nuevamente y la condición inicial 2:



Como te puedes dar cuenta únicamente en la segunda condición inicial se llama el símbolo de la “prima” para que le quede bien asignado correctamente, y terminamos como ya sabemos con las variables:

```

F1 F2 F3 F4 F5 F6
| Algebra Calc Other PrnIO Clean Up |
|-----|
deSolve((2*x*y+2*y^2+x^2+y^2),y'+2*x*
x^3+x^2*y+x*y^2+y^3=21
deSolve(y'-2*x*y=x and y(0)=0,x,y)
y = e^x/2 - 1/2
and y(0)=0 and y'(0)=1,x,y

```

Y damos ENTER:

```

F1 F2 F3 F4 F5 F6
| Algebra Calc Other PrnIO Clean Up |
|-----|
deSolve(y'-2*x*y=x and y(0)=0,x,y)
y = e^x/2 - 1/2
deSolve(y''+3*y'-4*y+x^2+7*x=0 and
y = -19/160 * e^-4*x - 8/5 * e^x + x^2/4 + 17*x/8 + 55/32
and y(0)=0 and y'(0)=1,x,y)

```

Y vemos el resultado de inmediato. Ésta es una excelente forma de que compruebes tus resultados. Ahora pasaremos al solucionador paso a paso.

Resolviendo con DeSolveN (paso a paso)

Vamos a comenzar a explicar el uso de este programa que por su naturaleza misma es didáctico ya que el ir haciendo paso a paso la ecuación diferencial te permite entender lo que se hace y así ir deduciendo y/o razonando el procedimiento. Antes de empezar es importante mencionar ciertas consideraciones y características del mismo.

Consideraciones:

1. Éste programa fue desarrollado por Ilidio Martins, un estudiante portugués.
2. DeSolveN puede solucionar ecuaciones diferenciales de ordenes superiores > 2° orden **ÚNICAMENTE**, es decir si yo tengo una E.D. de segundo orden ó menor es necesario usar el solucionador de HOME DeSolve **SOLAMENTE**.
3. Este programa tiene ciertas limitaciones, **NO** puede resolver ecuaciones diferenciales que contengan funciones trigonométricas, logarítmicas ó exponenciales, es decir únicamente que contengan monomios y/o polinomios. Por ejemplo:

$$2y'''' + y = x^3 + x^2 + 2$$

$$2y'''' + y''' + y' = 3x^4 + x$$

$$y'''''' + y' + 3y = 5$$

4. Sólo se deben usar variables X e Y, la Y siempre debe ser la que contenga las "primas".
5. Las variables "Y" siempre deben ir del lado izquierdo de la igualdad.
6. Las variables "X" siempre deben ir del lado derecho de la igualdad, al igual que los términos independientes.

7. Éste programa solo llega a soluciones generales, no particulares.

A pesar de las consideraciones, si es que llegaras a ver E.D. de órdenes superiores de manera general "casi" no veras E.D. que contengan funciones trigonométricas, logarítmicas y/o exponenciales, por lo tanto este programa es muy útil.

Ahora bien pasemos a los ejemplos.

$$24y''' + 2y'' - 5y' - y = 0$$

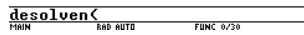
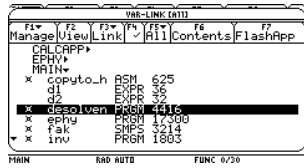
Para introducir la ecuación en la Texas debemos llamar esta función, para esto tecleamos "2nd" + signo menos de tecla blanca:



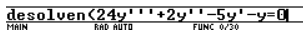
Este es el "CPU" de la calculadora, aquí están los folders que contienen la información y variables que se crean cuando haces ejercicios y/o problemas. Desplegamos el folder de MAIN dando a la derecha con el cursor sobre éste folder:



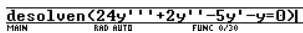
Vemos el contenido de la carpeta, el cual muestra el nombre del archivo, y del lado derecho su aplicación (ya sea programa, función, etc.) y el último número de la derecha su peso en bits. Nos posicionamos sobre la función "desolven" y damos ENTER:



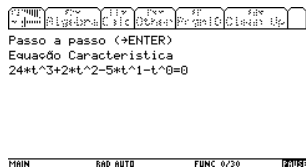
Vemos que se copia a la línea de entrada y ahora simplemente tecleamos tal cual la ecuación:



Como podrás ver se escribe exactamente igual que como con la función deSolve, sólo que la diferencia es que **no vamos a poner la terminación “,x,y)”**:

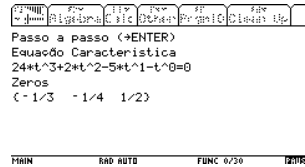


Simplemente cerramos con el paréntesis de cierre y damos ENTER:

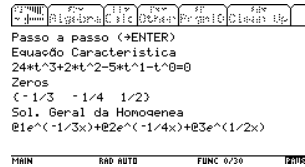


De aquí en adelante el programa se irá pausando, con la finalidad de que puedas observar lo que se hace, en la esquina inferior izquierda puedes ver que dice PAUSE. También otra cosa que puedes observar es que el idioma es portugués claro

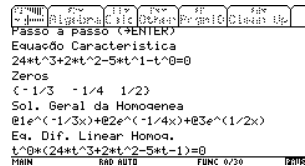
está, sin embargo es muy parecido al español y no debe haber problemas de interpretación. Como podemos ver el primer paso fue la conversión en términos de “t”, damos ENTER de nuevo y vemos:



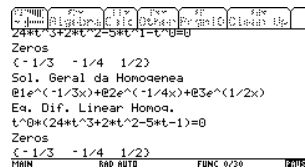
Vemos ahora las raíces de la ecuación que lo identifica con “Zeros” y los escribe en una lista, este paso es primordial para llegar a la solución general. Damos ENTER de nuevo:



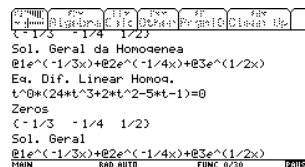
Vemos ahora la solución general de la homogénea. Damos ENTER:



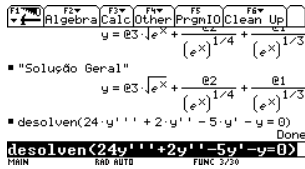
Luego hace otro método para resolverla. Damos ENTER de nuevo:



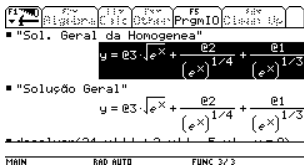
Nuevamente las raíces. Damos ENTER de nuevo:



Y vemos la solución general. Por último damos ENTER y vemos:



Podemos ver que en la parte superior se copiaron los resultados. La solución general y más atrás la solución general de la homogénea:



Podemos ver que el resultado es el mismo. Aquí es importante mencionar un par de cosas. Quizá tú veas el resultado en clase de la siguiente forma:

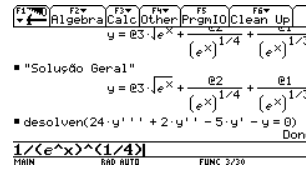
$$y(x) = C_1 e^{-x/3} + C_2 e^{x/2} + C_3 e^{-x/4}$$

Sin embargo debes de entender que el resultado es el mismo. En primer lugar la nomenclatura de las constantes no tiene importancia, es por esto que el primer término en la calculadora tiene @3 ó C3 y en el resultado a manó quizá lo veas con C1 ó C2. Y luego como las funciones exponenciales tienen signo negativo es por esto que la calculadora los pasa en la parte inferior como una división en lugar de ponerlo en una misma línea. Y también debes saber que:

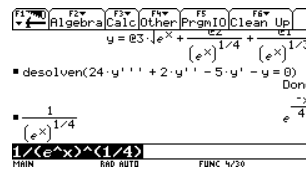
$$\frac{1}{(e^x)^{1/4}} = e^{-x/4}$$

Esto lo puedes comprobar introduciendo en la línea de entrada la expresión resultado y

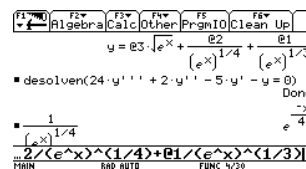
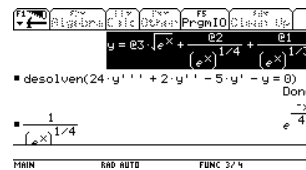
verás que lo transforma a la forma de la calculadora:



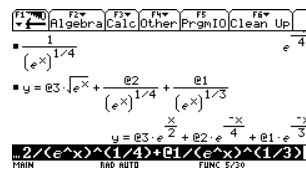
Damos ENTER:



Puedes ver que lo transforma a una sola línea como el resultado hecho a mano. Si tú sombreas el resultado y das ENTER para que se copie a la línea de entrada:



Damos otro ENTER y lo va a simplificar a su forma:



Y vemos que lo simplifica a una sola línea tal cual lo veríamos en un ejercicio hecho a mano.

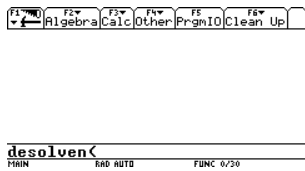
Haremos un ejercicio más:

$$4y''' + 33y' - 37y = 0$$

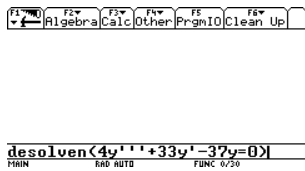
Con las condiciones Iniciales:

$$y(0) = 0; \quad y'(0) = -1 \quad y''(0) = 3$$

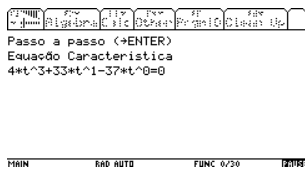
Como sabemos este programa no puede resolver con condiciones iniciales, sin embargo a partir de la solución general encontraremos la solución particular que piden. Para iniciar como sabemos llamamos la función “desolven(”, ó simplemente tecleamos en la línea de entrada ésta combinación de letras con el paréntesis de apertura:



Luego como sabemos tecleamos la ecuación tal cual la tenemos con las respectivas “primas” de cada variable “y”:

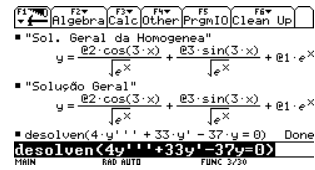


Cerramos el paréntesis del programa y damos ENTER:

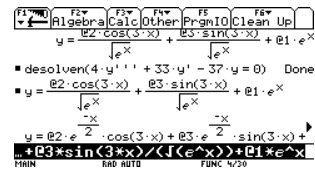
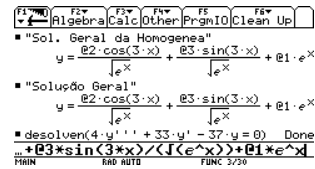
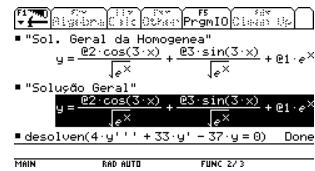


Vemos el procedimiento hasta paso a paso hasta llegar al resultado de la solución general, podemos darnos cuenta que contiene raíces imaginarias, por lo tanto

veremos resultados con funciones de senos y cosenos:



Vemos el resultado, de la solución general en la parte de arriba. Para ver este resultado en una sola línea como ya sabemos, borramos primero la línea de entrada con tecla CLEAR, luego sombreamos el resultado, damos ENTER, se copia a la línea de entrada y damos ENTER de nuevo para que lo simplifique:



Ya en una sola línea podemos empezar a trabajar. Como te debe de haber explicado tu profesor lo que se tiene que hacer es un sistema de ecuaciones con las constantes después de haber sustituido las condiciones iniciales. Para esto lo primero que haremos será nombrar ésta primera ecuación con la variable “d”, puede ser en realidad la variable que quieras. Borramos la línea de entrada, sombreamos nuestro resultado y damos ENTER:

Al final de la línea tecleamos como sabemos la tecla de asignación que corresponde a STO y luego el nombre de la variable con la que queremos llamar la ecuación “d”:

Damos ENTER:

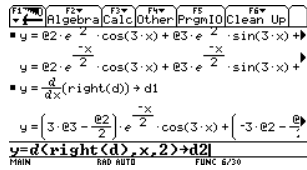
De primera vista parece que no hizo nada, pero en realidad ya lo dejo guardado en la variable “d”. Ahora como sabemos debemos derivar la expresión primero una y luego 2 veces para las condiciones iniciales de la y’ y y’’. Para esto primero borramos la línea de entrada con la tecla CLEAR y empezamos tecleando la combinación “y=” que será el inicio de la segunda ecuación, luego llamamos la función de derivación:

Luego debemos llamar la función “right(”, ésta función va extraer la parte derecha de la igualdad de nuestra ecuación “d”(que es la que se deriva), esto se hace debido a que si derivamos todo sin la función “right “ va a quedar la igualado a cero, ya que vamos a derivar con respecto a X y la Y la tomaría como constante y se eliminaría, también es por esta razón que empezamos tecleando “y=”. La función right sale del menú de Algebra F2 y del submenú Extract:

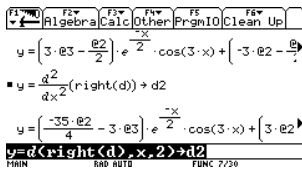
Ahora simplemente tecleamos la variable “d”, cerramos el primer paréntesis de la función “right”, luego la terminación “,x)” (para especificar que es respecto a equis la derivación) y terminamos asignando ésta ecuación con la tecla STO a la variable “d1” (para indicar que es la primera derivada):

Damos ENTER y vemos:

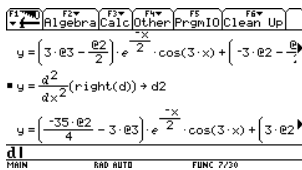
Ya está la primera derivada, para la segunda simplemente quitamos la sombra de la línea de entrada y cambiamos “d1” por “d2” (indicando segunda derivada) y en la función de derivación agregamos una coma extra y el número 2 indicando que queremos la segunda derivada:



Damos ENTER y vemos:



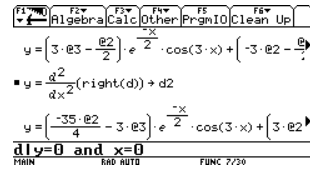
Listo ya que tenemos nuestras ecuaciones derivadas y asignadas con variables para manejarlas más fácilmente vamos a asignar las condiciones iniciales de cada una. Borrarnos la línea de entrada con tecla CLEAR y empezamos llamando la primera ecuación con la variable “d” y luego llamamos el operador “with” con “2nd” + letra K del teclado extendido:



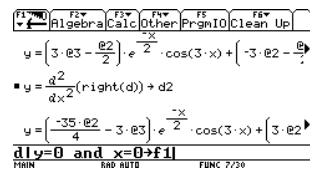
El operador “with” como debes haber visto al inicio de este manual en la parte de “introducción de datos y expresiones correctamente” puede sustituir valores, ahora simplemente tecleamos la primera condición diciendo que “y=0 and x=0”, con el espacio de barra espaciadora entre el operador “and”:

$$y(0) = 0$$

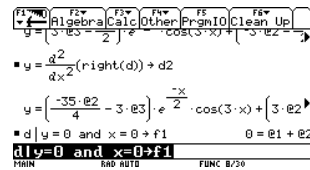
Esto significa que cuando X vale cero Y vale cero:



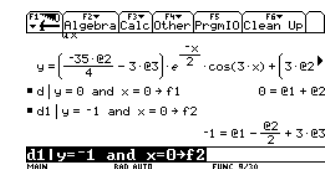
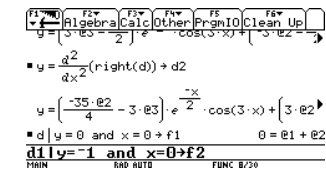
Ahora vamos a asignar la ecuación que salga con otra variable digamos “f1”:



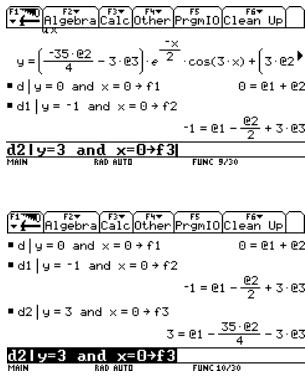
Damos ENTER y vemos:



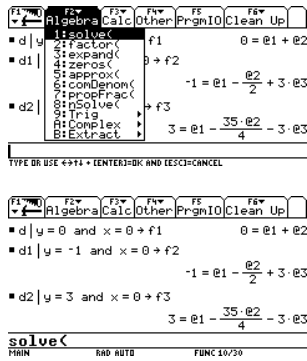
Vemos la primera ecuación del sistema de ecuaciones de las constantes. Lo mismo hacemos para las otras 2 ecuaciones de y’ y y”, asignados para f2 y f3 respectivamente:



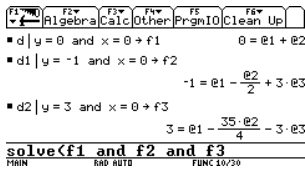
Esta es la primera derivada. Hacemos la última:



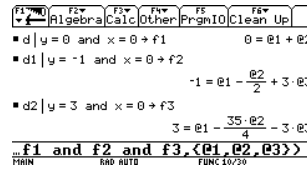
Ya que tenemos nuestro sistema de ecuaciones de 3 ecuaciones y 3 incógnitas ahora podemos simplemente encontrar los valores de cada constante, de igual forma aquí mismo se puede resolver con la función “solve()”. Borrarnos la línea de entrada con CLEAR y llamamos esta función:



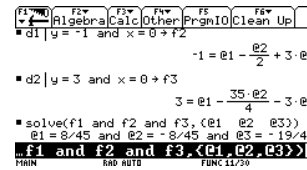
Ahora como ya tenemos nuestras ecuaciones asignadas simplemente tecleamos “f1 and f2 and f3” de igual forma separados por espacios entre los operadores “and”:



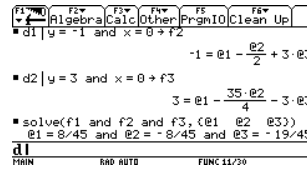
Ahora para indicarle que queremos que resuelva las constantes terminamos la función con “,{@1,@2,@3}”



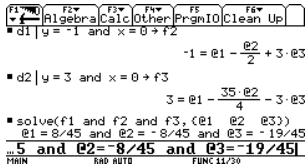
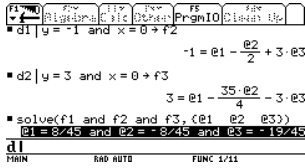
Con esto le estamos diciendo a la calculadora que queremos que encuentre los valores de las constantes, recuerda que los símbolos de las “llaves” se encuentran en “2nd” + teclas de paréntesis de apertura y cierre, las arrobas se encuentran con “2nd” + letra R del teclado extendido, y es importante que no confundas la llave con el paréntesis. El último símbolo es paréntesis y cada arroba debe ir separada por una coma. Damos ENTER:



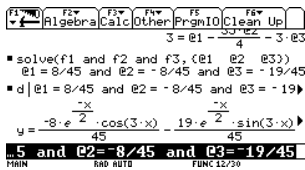
Y vemos los valores de las constantes. Ahora para escribir el resultado completo primero borramos la línea de entrada con tecla CLEAR, luego llamamos la ecuación original resultado que se encuentra en la variable “d” y sacamos el operador “with” (“2nd” + letra K):



Ahora simplemente para que le asigne las constantes damos una vez arriba con el cursor y sombreamos los resultados de las constantes y damos ENTER para que se copien a la línea de entrada:



Damos ENTER:



Y vemos el resultado de esta solución particular. Borramos todo lo que hicimos con F1 y opción 8 CLEAR HOME.

Con esto concluimos el curso para ecuaciones diferenciales apoyado con la TI-V200, espero te haya sido de ayuda y le des un buen uso, te recomiendo resolver los ejercicios que se dejan a continuación o bien empieces a resolver las tareas que te dejen en clase.

Ejercicios Propuestos

Primeros Problemas

De las siguientes ecuaciones diferenciales confirma ó rechaza que su solución es la que le corresponde:

$$a) y'' - y = 0 \quad \rightarrow \quad y = C1 \cdot e^{-x} + C2 \cdot e^x$$

$$b) 7y'' - y' + x^3 = 0 \quad \rightarrow \quad y = C1 \cdot e^{x/7} + \frac{x^4}{4} + 7x^3 + 147x^2 + 2058x + C2 + 14406$$

$$c) 4y'' - y' = x \quad \rightarrow \quad y = C1 \cdot e^{x/4} - \frac{x^2}{2} - 4x + C2 - 16$$

$$d) 4y'' - y' + \sin x = 0 \quad \rightarrow \quad y = C2 \cdot e^{x/4} - \frac{\cos x}{17} + \frac{4 \sin x}{20} + C1$$

$$e) y'' + 3y' + \sin x + 5x = \frac{x}{2} \quad \rightarrow \quad y = C1 \cdot e^{-3x} + \frac{3 \cos x}{15} + \frac{\sin x}{10} - \frac{3x^2}{4} + \frac{x}{2} + C2 - \frac{1}{6}$$

De las siguientes soluciones generales encuentra la ecuación diferencial que representa ésta solución:

$$a) C1 \cdot e^{-3x} - \frac{7x}{3} + \frac{7}{9}$$

$$b) C1 \cdot e^{-8x/3} + C2$$

$$c) C2 \cdot e^{4x} + \frac{e^x}{3} + C1$$

$$d) C5 \cdot e^x + \frac{C1}{e^x} + C4 \cdot x^2 + C3 \cdot x + C2$$

$$e) C1 \cdot \cos(3 \cdot \sqrt{3} \cdot x) + C2 \cdot \sin(3 \cdot \sqrt{3} \cdot x)$$

Ecuaciones Diferenciales y de orden superior

Encuentra la solución general y/o particular que se pide:

$$a) y'' + 3y' - 4y = 0; \quad y(0) = 1 \quad y'(0) = 1$$

$$b) y'' + 2y' + y = 0; \quad y(0) = 1 \quad y'(0) = -1$$

$$c) y'' + 4y' + 20y = 0; \quad y(0) = 3 \quad y'(0) = -1$$

$$d) y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$$

$$e) 4y'''' + 12y''' + 49y'' + 42y' + 10y = 0$$

$$f) y'''' + 4y''' + 24y'' + 40y' + 100y = 0$$

$$g) y''' + 8y = 0$$

$$h) y''' - 2y'' - 5y' + 6y = 0$$

$$i) y''' - y'' + 4y' - 4y = 0$$

$$j) y''' - 5y'' + 6y' = 0 \quad y(0) = 0 \quad y'(0) = 1 \quad y''(0) = 2$$

$$k) y''' - 3y'' + 3y' = 0 \quad y(0) = 0 \quad y'(0) = -1 \quad y''(0) = 3$$

$$l) y''' - 6y'' + 9y' = 0 \quad y(0) = 1 \quad y'(0) = 3 \quad y''(0) = 1$$

Bibliografía

Sitio Web:

<http://publiespe.espe.edu.ec/librosvirtuales/ecuaciones-diferenciales/ecuaciones-diferenciales/ecuaciones-diferenciales04.pdf>

Métodos Matemáticos 2. Ecuaciones Diferenciales de Orden Superior

L. A. Núñez

Centro de Astrofísica Teórica,

Departamento de Física, Facultad de Ciencias,

Universidad de Los Andes, Mérida 5101, Venezuela